Kolokwium drugi termin - Funkcje Analityczne

26.01.2023

- Proszę pisać rozwiązanie **każdego zadania** na **osobnej** kartce.
- Każdą kartkę proszę podpisać: **imieniem**, **nazwiskiem**, **numerem indeksu** oraz **numerem grupy** ćwiczeniowej lub **nazwiskiem** osoby prowadzącej ćwiczenia.

Zadanie 1. (10p.)
Wyznacz współczynniki rozwinięcia Laurenta funkcji

$$f(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z+2i)^2}$$

w obszarach

(a) $\{z \in \mathbb{C} \colon 1 < |z| < 2\}$,

(b) $\{z \in \mathbb{C} \colon |z| > 2\}$.

Zadanie 2. (10p.)
Znajdź punkty osobliwe funkcji f i określ ich rodzaj

$$f(z) = \frac{z^3}{z^2-1} \sin\left(\frac{2}{z-3}\right).$$

Czy f jest osobliwa w nieskończoności?

Zadanie 3. (10p.)
Znajdź część rzeczywistą i urojoną całki

$$\int_\gamma \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}z + i\right)}{(z-1)^4}\, dz,$$

gdzie γ jest pętlą:

(a) $\gamma(t) = \frac{1}{2}e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$,

(b) $\gamma = \partial T$, T jest trójkątem o wierzchołkach w punktach $(2, -1)$, $(2, 1)$, $(0, 0)$.

Zadanie 4. (10p.)
Rozważmy funkcję $f \colon \partial D(0,1) \to \mathbb{C}$ daną wzorem $f(z) = \overline{z} + z$. Czy istnieje funkcja F, która jest ciągła na $\overline{D}(0,1)$ oraz holomorficzna w $D(0,1)$, taka, że $F(z) = f(z)$, dla $z \in \partial D(0,1)$? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 5. (10p.)
Załóżmy, że funkcja $f \in H(\mathbb{C})$ jest wymierna. Jakie warunki musi spełniać funkcja f, żeby funkcja $g(z) = \exp(f(z))$ była meromorficzna?

Zadanie 6. (10p.)

Przypomnijmy, że dwa punkty na sferze Riemanna $p, q \in \widehat{\mathbb{C}}$ są *symetryczne* względem okręgu wielkiego C, jeśli jeden z nich jest obrazem drugiego przy inwersji względem C. W szczególności, jeśli C jest okręgiem, to środek C i punkt ∞ są symetryczne względem C.

Pokaż, że jeśli punkty p i q są symetryczne względem okręgu wielkiego C oraz h jest homografią, to punkty $h(p)$ i $h(q)$ są symetryczne względem $h(C)$.

Podpowiedź: Skorzystaj z faktu, jeśli punkty p i q są symetryczne względem C, wówczas istnieje $\lambda > 0$ taka, że

$$C = \left\{ z \in \mathbb{C} \colon \frac{|z-p|}{|z-q|} = \lambda \right\},$$

przy czym, dla $\lambda = 1$, C jest prostą, a dla $\lambda \neq 1$, C jest okręgiem.